論　文

2分木のハイパキューブへの埋込みについて

田湯　智[†]　　上野　修一[††]

On Embedding Binary Trees into Hypercubes

Satoshi TAYU[†] and Shuichi UENO[††]

あらまし　任意の N 点からなる2分木は $\lceil\log N\rceil$ 次元キューブにたかだか2の遅延で埋め込むことができると予想されている．任意の N 点からなる2分木は $\lceil\log N\rceil$ 次元キューブにたかだか8の遅延で埋め込めることが知られているが，上の予想が成立することが確かめられているのは，完全2分木やパス幅の小さいある種の2分木などの非常に限られた2分木にすぎない．本論文では，これらの結果の自然な一般化を示し，より広い種類の2分木に対して上の予想が成立することを確かめる．すなわち，2^n 点からなり，足の長さが2以下である均衡した2分キャタピラは n 次元キューブに遅延1で埋め込めること，および N 点からなり，真のパス幅が2以下である2分木は $\lceil\log N\rceil$ 次元キューブに遅延2で埋め込めることを示す．

キーワード　2分木，ハイパキューブ，埋込み，遅延，真のパス幅

1. まえがき

ハイパキューブは，正則で再帰的な構造をしていることや結線数が比較的少ないことなどの理由から，並列計算のモデルとしてよく用いられている．一方，分割統治法などに代表されるように，アルゴリズムの基礎構造は2分木として表現されることが多い．これらのアルゴリズムをハイパキューブ上で効率的に実行するためには，2分木をハイパキューブに効率的に埋め込む手法を開発することが必要である．埋込みの効率を評価するためにさまざまな尺度が用いられているが，ここでは最も基本的な尺度の一つであると考えられている遅延に着目し，2分木をハイパキューブに最小の遅延で埋め込む問題について考察する．

一般に N 点からなる2分木を $\lceil\log N\rceil$ 次元キューブに遅延1で埋め込めるとは限らないことが知られているが（例えば完全2分木），任意の N 点からなる2分木は $\lceil\log N\rceil$ 次元キューブに遅延2で埋め込めるであろうと予想されている [10]．すなわち，任意の2分木はハイパキューブに非常に効率的に埋め込めるであろうと予想されているが，この予想の成否は未解決である．

これに関連して，任意の N 点からなる2分木は $\lceil\log N\rceil$ 次元キューブに遅延8で埋め込めることが知られているが [5]，上の予想が成立することが確かめられているのは，完全2分木やパス幅の小さいある種の2分木などの非常に限られた2分木にすぎない．パス幅の小さい2分木に関しては，2^n 点からなり，足の長さが1である均衡した2分キャタピラ（ある種のパス幅が1である2分木）は n 次元キューブに遅延1で埋め込めること [4]，および任意の N 点からなる2分キャタピラ（ある種の（真の）パス幅が2以下である2分木）は $\lceil\log N\rceil$ 次元キューブに遅延2で埋め込めることなどが知られている [1]．

本論文では，これらの結果の自然な一般化を示し，より広い種類の2分木に対して上の予想が成立することを確かめる．すなわち，2^n 点からなり，足の長さが2以下である均衡した2分キャタピラ（ある種の（真の）パス幅が2である2分木）は n 次元キューブに遅延1で埋め込めること，および N 点からなり，真のパス幅が2以下である任意の2分木は $\lceil\log N\rceil$ 次元キューブに遅延2で埋め込めることを示す．

本論文は以下のように構成されている．**2.** では，グラフ，ハイパキューブ，埋込み，および（真の）パス幅の定義と関連する事柄について述べる．**3.** では，本

[†] 北陸先端科学技術大学院大学情報科学研究科，石川県
School of Information Science, Japan Advanced Institute of Science and Technology, Ishikawa-ken, 923–1292 Japan
[††] 東京工業大学電子物理工学科，東京都
Department of Physical Electronics, Tokyo Institute of Technology, Meguro-ku Tokyo, 152–8552 Japan

論文の主結果（定理1と2）と関連する既知の結果について述べる．定理1と2は，それぞれ**4.**と**5.**で証明される．

2. 準　　備

2.1 グラフに関する諸定義

グラフ G の点集合と辺集合をそれぞれ $V(G)$ と $E(G)$ で表す．$X \subseteq V(G)$ に対して，G から X の点をすべて取り除いて得られるグラフを $G \setminus X$ で表す．$G \setminus (V(G) - X)$ を X 上の誘導部分グラフと言い，$G[X]$ で表す．$Y \subseteq E(G)$ に対して，G から Y の辺をすべて取り除いて得られるグラフを $G - Y$ で表す．また，$G' = G - Y$ であるとき，G を $G' + Y$ で表す．グラフ G と H に対して，点集合と辺集合がそれぞれ $V(G) \cup V(H)$ と $E(G) \cup E(H)$ であるグラフを $G \cup H$ で表す．グラフ G の点 v の次数を $\deg_G(v)$ で表す．グラフ G の2点 u，v 間の距離を $\mathrm{dist}_G(u, v)$ で表す．

G を連結な2部グラフとし，(A, B) を $V(G)$ の独立点集合への2分割とする．$|A| = |B|$ であるとき，G は均衡していると言う．木は連結な2部グラフである．

最大次数が3以下である木を2分木と言う．次数3の点がたかだか一つ存在する2分木を2分星と言う．次数3の点をすべて含むパスが存在する2分木を2分キャタピラと言う．2分星は2分キャタピラである．

2.2 埋　込　み

グラフ G と H に対して，単射 $\phi : V(G) \to V(H)$ と各辺 $(u, v) \in E(G)$ を H の点 $\phi(u)$ と $\phi(v)$ を結ぶパスに写す写像 ρ の対 $\langle \phi, \rho \rangle$ を G の H への埋込みと言う．辺 $e \in E(G)$ に対し，H 上のパス $\rho(e)$ の長さを $\langle \phi, \rho \rangle$ に関する e の遅延と言う．$\langle \phi, \rho \rangle$ に関する G の辺の遅延の最大値を $\langle \phi, \rho \rangle$ の遅延と言う．G の H への遅延1の埋込みが存在するならば，G は H の部分グラフである．

2.3 ハイパキューブ

長さ n のすべての2値ベクトルの集合を点集合とし，ちょうど一つの座標が異なっている2点を辺で結んで得られるグラフを n 次元キューブと言い，$Q(n)$ で表す．$Q(n)$ は 2^n 点からなる連結グラフであり，各点の次数は n である．ハミング重みが偶数である点の集合と奇数である点の集合をそれぞれ A と B とすると，(A, B) は $Q(n)$ の独立点集合への2分割であり，$|A| = |B| = 2^{n-1}$ であるので，$Q(n)$ は均衡した2部グラフである．$Q(n)$ は次のように再帰的に定義することもできる：$Q(1)$ は長さ1のパスである；$Q(n) (n \geq 2)$ は，二つの $Q(n-1)$ の対応する2点を辺で結んで得られるグラフである．

$Q(n)$ の点数は 2^n であるので，グラフ G の $Q(n)$ への埋込みが存在するためには，$n \geq \lceil \log |V(G)| \rceil$ でなければならない．$n = \lceil \log |V(G)| \rceil$ であるとき，$Q(n)$ は G の最適ハイパキューブであると言う．

2.4 木とパス幅

グラフ G に対して，$V(G)$ の部分集合の系列 $\mathcal{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_r)$ は，以下の条件をすべて満たしているとき，G のパス分解であると言う：

（1） $X_i \not\subseteq X_j$ $(i \neq j)$;

（2） $\bigcup_{1 \leqq i \leqq r} X_i = V(G)$;

（3） 任意の辺 $(u, v) \in E(G)$ に対して，$u, v \in X_i$ であるような i が存在する；

（4） $X_l \cap X_n \subseteq X_m$ $(1 \leqq l \leqq m \leqq n \leqq r)$.

$|X_i| - 1$ の最大値を $\mathcal{X}$ の幅と言う．G のパス分解の幅の最小値を G のパス幅と言い，$pw(G)$ で表す．

パス分解 $\mathcal{X}$ は，更に以下の条件を満たすとき，G の真のパス分解であると言う．

（5） $|X_l \cap X_n| \leqq |X_m| - 2$ $(1 \leqq l < m < n \leqq r)$.

G の真のパス分解の幅の最小値を G の真のパス幅と言い，$ppw(G)$ で表す．

任意のグラフ G に対して，$ppw(G) \leqq pw(G) \leqq ppw(G) + 1$ であることが知られている[8]．また，任意の2分キャタピラの（真の）パス幅はたかだか2であることが簡単にわかる．次の定理は文献[9]で証明されている定理の特殊な場合である．

［定理 I］[9] 真のパス幅が2以下である木 T には，$ppw(T \setminus V(S)) = 1$ となるパス S が存在する． □

定理 I の条件を満たすパス S のうち，両端点の T 上の次数が2以下のものを背骨と呼ぶ．背骨は常に存在することに注意されたい．

T が2分キャタピラであるときには，背骨 S は次数3の点をすべて含んでいる．また，$T - E(S)$ の任意の連結成分はパスである．このパスを T の足と言う．足の辺数を足の長さと言う．足の長さが1以下のキャタピラのパス幅は1であり，真のパス幅はたかだか2である．

3. 主　結　果

2分木のハイパキューブへの埋込みに関する以下のような興味深い予想が知られている．

［予想 1］ 2^n 点からなる均衡した2分木 T は $Q(n)$

に遅延1で埋め込める．すなわち，T は $Q(n)$ の全域木である． □

［予想 2］ 任意の2分木は，最適ハイパキューブに遅延2で埋め込める． □

予想 1 が成立するならば，予想 2 も成立することが証明できるので，予想 1 の方が予想 2 よりも強い [2],[11].

これらの予想の成否は未解決であるが，任意の2分木はその最適ハイパキューブに遅延8で埋め込めることが知られている [5]. また，以下のような2分木に対してこれらの予想が成立することが確かめられている．

［定理 II］[7] 2^n 点からなる均衡した2分星は $Q(n)$ に遅延1で埋め込める． □

［定理 III］[4] 2^n 点からなり，足の長さが1以下である均衡した2分キャタピラは $Q(n)$ に遅延1で埋め込める． □

［定理 IV］[3] 2^n 点からなり，足の長さの偶奇が一致している均衡した2分キャタピラは $Q(n)$ に遅延1で埋め込める． □

［定理 V］[1] 任意の2分キャタピラはその最適ハイパキューブに遅延2で埋め込める． □

［定理 VI］[6] 完全2分木はその最適ハイパキューブに遅延2で埋め込める． □

本論文では，上の予想 1 と 2 に関連した二つの結果を示す．まず，定理 III の自然な一般化であり，定理 IV を補う以下の結果を示す．

［定理 1］ 2^n 点からなり，足の長さが2以下である均衡した2分キャタピラは $Q(n)$ に遅延1で埋め込める． □

次に，以下のような定理 V の自然な一般化を示す．

［定理 2］ 真のパス幅がたかだか2である2分木はその最適ハイパキューブに遅延2で埋め込める． □

定理 1 と 2 は，それぞれ **4.** と **5.** で証明される．

なお，証明は複雑になるが，定理 2 の証明と同じ手法を用いて，パス幅が2以下の任意の2分木はその最適ハイパキューブに遅延2で埋め込めることを示すことができる．

4. 定理1の証明

4.1 準　　備

本節では，定理 1 の証明に必要ないくつかの定義を述べ，二つの補題を証明する．$\mathcal{C}_n$ を 2^n 点からなり，足の長さが2以下の均衡した2分キャタピラの集合とする．

任意の $C \in \mathcal{C}_n$ の任意の背骨を S とする．$V(S) = \{v_0, v_1, \cdots, v_s\}$ とし，v_i と v_{i+1} $(0 \leqq i \leqq s-1)$ は隣接しているものとする．このとき，点の系列を用いて $S = (v_0, v_1, \cdots, v_s)$ と表現することもある．v_i を含む C の足の点集合を L_i で表す．$(L_0, L_1, \cdots, L_s)$ は $V(C)$ の分割である．すなわち，$V(C) = \bigcup_{i=0}^{s} L_i$ であり，$i \neq j$ であるとき，$L_i \cap L_j = \emptyset$ である．$0 \leqq i < j \leqq s$ であるとき，誘導部分グラフ $C[\{v_i, v_{i+1}, \cdots, v_j\}]$ を $S_{i,j}$ で表す．また，$C[\cup_{k=i}^{j} L_k]$ を $C_{i,j}$ で表す．$C_{i,j}$ は2分キャタピラであり，$S_{i,j}$ は $C_{i,j}$ の背骨である．

任意の点 $v \in V(C)$ の重みを

$$w(v) = (-1)^{\mathrm{dist}_C(v_0, v)}$$

と定義する．

$$V_1 = \{v | w(v) = 1\},$$
$$V_{-1} = \{v | w(v) = -1\}$$

と定義すると (V_1, V_{-1}) は $V(C)$ の分割である．$0 \leqq i \leqq s$ に対して，

$$\begin{aligned} g_i &= |L_i|, \\ a_i &= \sum_{v \in L_i} w(v) \\ &= |L_i \cap V_1| - |L_i \cap V_{-1}| \end{aligned}$$

と定義する．C の任意の足の長さは2以下であるから，

$$1 \leqq g_i \leqq 3 \tag{1}$$

である．また，i が偶数ならば $0 \leqq a_i \leqq 1$ であり，i が奇数ならば $-1 \leqq a_i \leqq 0$ である．従って，

$$|a_i| \leqq 1 \quad (0 \leqq i \leqq s), \tag{2}$$
$$|a_i + a_{i+1}| \leqq 1 \quad (0 \leqq i \leqq s-1) \tag{3}$$

である．更に，式 (2) と式 (3) より，

$$\left| \sum_{j=i}^{k} a_j \right| \leqq \left\lceil \frac{k-i+1}{2} \right\rceil \quad (0 \leqq i \leqq k \leqq s) \tag{4}$$

である．次に

$$m = \max\{x | \textstyle\sum_{j=x}^{s} g_i \geqq 2^{n-1} - 1\},$$
$$t(i) = \max\{x | \textstyle\sum_{j=i}^{x} g_j \leqq 2^{n-1} + 1\} \ (0 \leqq i \leqq m)$$

と定義する．$i \leqq j$ ならば，$t(i) \leqq t(j)$ である．更に，$0 \leqq i \leqq m$ に対して，

$$b_i = \sum_{j=i}^{t(i)} g_j,$$
$$c_i = \sum_{j=i}^{t(i)} a_j$$

と定義する．(V_1, V_{-1}) は $V(C)$ の分割であるから，g_i と a_i の差は $2|V_{-1} \cap L_i|$ である．故に，g_i と a_i の偶奇は等しい．従って，定義から b_i と c_i の偶奇も等しい．更に，$t(i)$ と b_i の定義，および式 (1) より，

$$2^{n-1} - 1 \leqq b_i \leqq 2^{n-1} + 1 \quad (0 \leqq i \leqq m) \tag{5}$$

である．

[補題 1]　以下の (P1)～(P4) のいずれかが成立する．

(P1)　$c_x = 0$ となる $x\,(0 \leqq x \leqq m)$ が存在する．

(P2)　以下の（i）～（iii）の条件をすべて満たす $x, y\,(1 \leqq x \leqq y \leqq s-1)$ が存在する．
- (i)　$\sum_{j=x}^{y} g_j = 2^{n-1}$;
- (ii)　$\sum_{j=x}^{y} a_j = 0$;
- (iii)　$y - x$ は奇数．

(P3)　以下の（i）～（iv）の条件をすべて満たす $x, y\,(1 \leqq x \leqq y \leqq s)$ が存在する．
- (i)　$\sum_{j=x}^{y} g_j = 2^{n-1} + 1$;
- (ii)　$\sum_{j=x}^{y} a_j = a_y$;
- (iii)　$g_y = 3$;
- (iv)　$y - x$ は偶数．

(P4)　以下の（i）～（iv）の条件をすべて満たす $x, y\,(1 \leqq x \leqq y \leqq s)$ が存在する．
- (i)　$\sum_{j=x}^{y} g_j = 2^{n-1} - 1$;
- (ii)　$\sum_{j=x}^{y} a_j = -a_{x-1}$;
- (iii)　$g_{x-1} = 3$;
- (iv)　$y - x$ は偶数．

(証明)　任意の $i\,(0 \leqq i \leqq m)$ に対して，

$$c_i \neq 0 \tag{6}$$

であるならば，(P2)～(P4) のいずれかが成立することを示せば十分である．

$c_0 > 0$ と仮定する．($c_0 < 0$ のときも同様に証明できる．)

$$f = \min\{i | c_i < 0\}$$

と定義する．C は均衡しているので，$c_{t(0)+1} = -c_0 < 0$ である．従って，$f\,(1 \leqq f \leqq m)$ は必ず存在する．

式 (6) と f の定義より，

$$c_{f-1} \geqq 1, \tag{7}$$
$$c_f \leqq -1 \tag{8}$$

である．式 (7) と (8)，および c_i の定義より，

$$\sum_{j=t(f-1)+1}^{t(f)} a_j = c_f - (c_{f-1} - a_{f-1}) \leqq a_{f-1} - 2 \tag{9}$$

である．式 (2) より，次の 2 式を得る．

$$a_{f-1} - 2 \leqq -1,$$
$$t(f) - t(f-1) \geqq -\sum_{j=t(f-1)+1}^{t(f)} a_j.$$

従って，式 (9) より，次式を得る．

$$t(f) - t(f-1) \geqq 1. \tag{10}$$

また，$t(i)$ の定義より，次の 2 式を得る．

$$\sum_{j=f-1}^{t(f-1)+1} g_j \geqq 2^{n-1} + 2, \tag{11}$$
$$\sum_{j=f}^{t(f)} g_j \leqq 2^{n-1} + 1. \tag{12}$$

式 (11) と式 (12) より，

$$g_{f-1} - \sum_{j=t(f-1)+2}^{t(f)} g_j \geqq 1 \tag{13}$$

である．

式 (1) と式 (13) より，

$$g_{f-1} \geqq \sum_{j=t(f-1)+2}^{t(f)} g_j + 1 \geqq t(f) - t(f-1)$$

である．故に，

$$t(f) \leqq t(f-1) + g_{f-1} \tag{14}$$

である．式 (1)，(10)，および式 (14) より，次式を得る．

$$1 \leqq t(f) - t(f-1) \leqq 3. \tag{15}$$

[主張 1]　$a_{f-1}=1$ である．

(証明)　式 (2) より，$|a_{f-1}| \leqq 1$ であることに注意されたい．

まず，$a_{f-1} = 0$ と仮定し，矛盾を導く．前に述べたように，g_i と a_i の偶奇は等しいので，式 (1) より，$g_{f-1} = 2$ である．故に，式 (14) より，$t(f) \leqq t(f-1)+2$ である．よって，式 (2) と式 (3) より，

$$\left|\sum_{j=t(f-1)+1}^{t(f)} a_j\right| \leqq 1 \tag{16}$$

である．従って，仮定と式 (7) より，

$$\begin{aligned}\sum_{j=f}^{t(f-1)} a_j &= c_{f-1} - a_{f-1} \\ &\geqq 1 \end{aligned} \tag{17}$$

を得る．一方，式 (8) と式 (16) より，

$$\begin{aligned}\sum_{j=f}^{t(f-1)} a_j &= c_f - \sum_{j=t(f-1)+1}^{t(f)} a_j \\ &\leqq 0 \end{aligned} \tag{18}$$

を得るが，式 (17) と式 (18) は矛盾している．よって，$a_{f-1} \neq 0$ である．

次に，$a_{f-1} = -1$ と仮定し，矛盾を導く．仮定と式 (7) より，

$$\begin{aligned}\sum_{j=f}^{t(f-1)} a_j &= c_{f-1} - a_{f-1} \\ &\geqq 2 \end{aligned} \tag{19}$$

を得る．一方，式 (4)，式 (8)，および式 (15) より，

$$\begin{aligned}\sum_{j=f}^{t(f-1)} a_j &= c_f - \sum_{j=t(f-1)+1}^{t(f)} a_j \\ &\leqq c_f + \left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil \\ &\leqq 1 \end{aligned} \tag{20}$$

を得るが，式 (19) と式 (20) は矛盾している．よって，$a_{f-1} \neq -1$ である．

従って，$a_{f-1} = 1$ である．　□

主張 1 と式 (7) より，

$$\begin{aligned}\sum_{j=f}^{t(f-1)} a_j &= c_{f-1} - a_{f-1} \\ &\geqq 0 \end{aligned} \tag{21}$$

を得る．式 (8) と式 (21) より，次式を得る．

$$\begin{aligned}\sum_{j=t(f-1)+1}^{t(f)} a_j &= c_f - \sum_{j=f}^{t(f-1)} a_j \\ &\leqq -1. \end{aligned} \tag{22}$$

式 (15) より，$t(f)-t(f-1)$ の値によって，三つの場合に分けて考察する．

[場合 1]　$t(f) = t(f-1)+1$ のとき：式 (22) と場合 1 の仮定より，$a_{t(f)} \leqq -1$ であるから，式 (2) より，

$$a_{t(f)} = -1 \tag{23}$$

である．式 (8) と式 (23) より，

$$\sum_{j=f}^{t(f-1)} a_j \leqq 0 \tag{24}$$

を得る．式 (21) と式 (24) より，

$$\sum_{j=f}^{t(f-1)} a_j = 0 \tag{25}$$

を得る．また，主張 1 より，$f-1$ は偶数であり，式 (23) より，$t(f)$ は奇数である．従って，

(†)　$t(f)-f$ は偶数である．

a_i と g_i の偶奇は等しいので，式 (1) と主張 1 より，g_{f-1} は 1 か 3 である．

g_{f-1} の値によって，二つの場合に分けて考察する．

[場合 1-1]　$g_{f-1}=1$ のとき：$t(i)$ の定義と場合 1 の仮定より，

$$\sum_{j=f-1}^{t(f)} g_j \geqq 2^{n-1}+2 \tag{26}$$

である．式 (26) と場合 1-1 の仮定より，

$$\begin{aligned}\sum_{j=f}^{t(f)} g_j &= \sum_{j=f-1}^{t(f)} g_j - g_{f-1} \\ &\geqq 2^{n-1}+1 \end{aligned} \tag{27}$$

である．式 (12) と式 (27) より，

$$\sum_{j=f}^{t(f)} g_j = 2^{n-1}+1 \tag{28}$$

である．a_i と g_i の偶奇が等しいので，式 (23) より $g_{t(f)}$ は 1 または 3 である．

更に，二つの場合に分けて考察する．

[場合 1-1-1]　$g_{t(f)}=1$ のとき：式 (28) より，

$$\sum_{j=f}^{t(f)-1} g_j = 2^{n-1} \tag{29}$$

であり，式 (25) と場合 1 の仮定より，

$$\sum_{j=f}^{t(f)-1} a_j = 0 \tag{30}$$

である．従って，(†) と式 (29)，および式 (30) より，$x=f$，$y=t(f)-1$ とすれば，x と y は (P2) の条件を満たす．

[場合 1-1-2] $g_{t(f)}=3$ のとき：場合 1 の仮定と式 (25) より，$\sum_{j=f}^{t(f)} a_j = a_{t(f)}$ である．従って，(†) と式 (28)，および場合 1-1-2 の仮定より，$x=f$，$y=t(f)$ とすれば，x と y は (P3) の条件を満たす．

[場合 1-2] $g_{f-1}=3$ のとき：式 (23) と式 (25) より，$c_f = \sum_{j=f}^{t(f)} a_j = -1$ である．故に，b_f は奇数である．従って，式 (5) より，$b_f = \sum_{j=f}^{t(f)} g_j$ は $2^{n-1}-1$，または $2^{n-1}+1$ である．

この場合も，更に二つの場合に分けて考察する．

[場合 1-2-1] $\sum_{j=f}^{t(f)} g_j = 2^{n-1}-1$ のとき：式 (23) と式 (25) より，$\sum_{j=f}^{t(f)} a_j = -1$ であるから，主張 1 より，$\sum_{j=f}^{t(f)} a_j = -a_{f-1}$ である．従って，(†) と場合 1-2，および 1-2-1 の仮定より，$x=f$，$y=t(f)$ とすれば，x と y は (P4) の条件を満たす．

[場合 1-2-2] $\sum_{j=f}^{t(f)} g_j = 2^{n-1}+1$ のとき：$t(i)$ の定義より，$\sum_{j=f-1}^{t(f-1)} g_j \leqq 2^{n-1}+1$ であるから，場合 1-2 と 1-2-2 の仮定より，

$$\begin{aligned} g_{t(f)} &= \sum_{j=f}^{t(f)} g_j - \sum_{j=f-1}^{t(f-1)} g_j + g_{f-1} \\ &\geqq 3 \end{aligned}$$

である．よって，式 (1) より，$g_{t(f)}=3$ である．更に，式 (25) と場合 1 の仮定より，$\sum_{j=f}^{t(f)} a_j = a_{t(f)}$ である．従って，(†) と場合 1-2-2 の仮定より，$x=f$，$y=t(f)$ とすれば，x と y は (P3) の条件を満たす．

[場合 2] $t(f)=t(f-1)+2$ のとき：式 (14) より，$g_{f-1} \geqq 2$ であり，主張 1 より，g_{f-1} は奇数である．よって，式 (1) より，

$$g_{f-1} = 3 \tag{31}$$

である．式 (1) より，$g_{t(f)} \geqq 1$ であるから，式 (11) と (31)，および場合 2 の仮定より，

$$\begin{aligned} \sum_{j=f}^{t(f)} g_j &= \sum_{j=f-1}^{t(f-1)+1} g_j + g_{t(f)} - g_{f-1} \\ &\geqq 2^{n-1} \end{aligned} \tag{32}$$

である．式 (22) と場合 2 の仮定より，$a_{t(f)-1}+a_{t(f)} \leqq -1$ である．よって，式 (3) より，

$$a_{t(f)-1} + a_{t(f)} = -1 \tag{33}$$

である．式 (8) と式 (33) より，この場合にも式 (24) を得る．式 (21) と式 (24) より，式 (25) を得る．式 (25) と式 (33) より，$c_f=-1$ である．c_f と b_f の偶奇は等しいので，$b_f = \sum_{j=f}^{t(f)} g_j$ は奇数である．よって，式 (5) と式 (32) より，この場合にも，式 (28) を得る．式 (2) と式 (33) より，次の (a) か (b) のどちらか一方が成り立つ：

(a) $a_{t(f)-1}=-1$ かつ $a_{t(f)}=0$;

(b) $a_{t(f)-1}=0$ かつ $a_{t(f)}=-1$.

[場合 2-1] (a) が成り立つとき：主張 1 より，$f-1$ は偶数であり，$a_{t(f)-1}=-1$ より，$t(f)-1$ は奇数である．故に，

(‡) $t(f)-f-1$ は偶数である．

$a_{t(f)}=0$ より $g_{t(f)}=2$ である．よって，式 (28) より，

$$\sum_{j=f}^{t(f)-1} g_j = 2^{n-1}-1 \tag{34}$$

である．更に，式 (25) と $a_{t(f)-1}=-1$ より，

$$\sum_{j=f}^{t(f)-1} a_j = -1 \tag{35}$$

である．よって，主張 1 と式 (35) より，$\sum_{j=f}^{t(f)-1} a_j = -a_{f-1}$ である．従って，(‡) と式 (31)，および式 (34) より，$x=f$，$y=t(f)-1$ とすれば，x と y は (P4) の条件を満たす．

[場合 2-2] (b) が成り立つとき：主張 1 より，$f-1$ は偶数であり，$a_{t(f)}=-1$ より，$t(f)$ は奇数である．故に，(†) を得る．式 (13) と場合 2 の仮定より，$g_{t(f)} \leqq 2$ である．よって，$a_{t(f)}$ と $g_{t(f)}$ の偶奇は等しいので，$g_{t(f)}=1$ である．従って，式 (28) より，式 (29) を得る．式 (25) と $a_{t(f)-1}=0$ より，式 (30) を得る．従って，(†) より，$t(f)-f-1$ は奇数であるから，式 (29)

と式 (30) より，$x=f$，$y=t(f)-1$ とすれば，x と y は (P2) の条件を満たす．

[場合 3] $t(f)=t(f-1)+3$ のとき：このとき，式 (14) より，$g_{f-1}\geqq 3$ であるから，式 (1) より，この場合にも，式 (31) を得る．式 (13) と式 (31)，および場合 3 の仮定より，$\sum_{j=t(f)-1}^{t(f)} g_j \leqq 2$ である．従って，式 (1) より，

$$g_{t(f)}=g_{t(f)-1}=1 \tag{36}$$

を得る．$t(f)$ と $t(f)-1$ の偶奇は異なるので，式 (36) より，

$$a_{t(f)-1}+a_{t(f)}=0 \tag{37}$$

を得る．式 (2)，(22)，および式 (37) より，

$$a_{t(f)-2}=-1 \tag{38}$$

を得る．主張 1 と式 (38) より，この場合にも，(†) を得る．式 (38) より，$t(f)$ は奇数であるから，式 (36) より，この場合にも，式 (23) を得る．式 (37) と式 (38) より，$\sum_{j=t(f)-2}^{t(f)} a_j=-1$ であるから，式 (21) より，$\sum_{j=f}^{t(f)} a_j \geqq -1$ である．よって，式 (8) より，$\sum_{j=f}^{t(f)} a_j=-1$ である．従って，式 (23) より，この場合にも，式 (30) を得る．式 (11) と式 (31)，および式 (36) より，

$$\begin{aligned}\sum_{j=f}^{t(f)} g_j &= \sum_{j=f-1}^{t(f-1)+1} g_j + g_{t(f)-1}+g_{t(f)}-g_{f-1}\\ &\geqq 2^{n-1}+1\end{aligned}$$

であるから，式 (12) より，式 (28) を得る．式 (28) と式 (36) より，式 (29) を得る．(†) より，$t(f)-f-1$ は奇数であるから，式 (29) と式 (30) より，$x=f$，$y=t(f)-1$ とすれば，x と y は (P2) の条件を満たす．

以上で補題 1 は証明された．□

[補題 2] (P1) が成立しているとき，すなわち $c_i=0$ となる i が存在するとき，以下の（i），（ii）のいずれかを満たす $z\,(1\leqq z\leqq m)$ が存在する．

（i） $t(z)=s$ かつ $c_z=0$;

（ii） $g_{t(z)+1}\geqq 2$ かつ $c_z=0$.

（証明） $c_i=0$ とする．$t(i)=s$ ならば，$z=i$ は（i）を満たす．そこで，$t(i)<s$ と仮定する．

$i=0$ のとき：$t(i)$ の定義と式 (5) より，$t(0)+1\leqq m$，かつ $t(t(0)+1)=s$ である．よって，$c_0+c_{t(0)+1}=0$ である．従って，$z=t(0)+1$ とすれば，$c_z=-c_0=0$ であるから，z は（i）を満たす．

$i>0$ のとき：c_i と b_i の偶奇は等しいので，式 (5) より，$b_i=2^{n-1}$ である．よって，$t(i)$ の定義より，$\sum_{j=i}^{t(i)+1} g_j \geqq 2^{n-1}+2$ であるから，

$$\begin{aligned}g_{t(i)+1} &= \sum_{j=i}^{t(i)+1} g_j - b_i\\ &\geqq 2\end{aligned}$$

である．従って，$z=i$ は（ii）を満たす．□

4.2 埋込み

定理 1 を示すためには，次の補題を示せば十分である．

[補題 3] 任意の $C\in\mathcal{C}_n$ の任意の背骨を $S=(v_0,v_1,\cdots,v_s)$ とする．このとき，s が奇数ならば，$\mathrm{dist}_{Q(n)}(\phi(v_0),\phi(v_s))=1$ であり，s が偶数ならば，$\mathrm{dist}_{Q(n)}(\phi(v_0),\phi(v_s))=2$ であるような C の $Q(n)$ への遅延 1 の埋込み $\langle\phi,\rho\rangle$ が存在する．

（証明） n に関する数学的帰納法で示す．$n\leqq 2$ のとき，$Q(n)$ の任意の 2 点間の距離は 2 以下であり，任意の $C\in\mathcal{C}_n$ はパスであるから，この補題が成立するのは明らかである．

$n\geqq 3$ とし，$n-1$ のときはこの補題が成立すると仮定する．$C\in\mathcal{C}_n$ を $C^1,C^2\in\mathcal{C}_{n-1}$ に分解し，帰納法の仮定から得られる C^1 と C^2 の $Q(n-1)$ への埋込みを用いて C の $Q(n)$ への埋込みを構成することにより，帰納段階を証明する．

任意の $i\,(0\leqq i\leqq s)$ に対して，$|L_i|=2$ ならば，$L_i=\{v_i,v_{i,1}\}$ とし，$|L_i|=3$ ならば，$L_i=\{v_i,v_{i,1},v_{i,2}\}$ とする．但し，$|L_i|=3$ のときは，$\deg_C(v_{i,1})=2$，かつ $\deg_C(v_{i,2})=1$ と仮定する．

$Q(n)$ から，一つの次元の辺をすべて取り除いて得られるグラフは二つの $n-1$ 次元キューブからなる．この二つの $n-1$ 次元キューブをそれぞれ $Q^1(n-1)$，$Q^2(n-1)$ とする．$(V(Q^1(n-1)),\ V(Q^2(n-1)))$ は $V(Q(n))$ の分割であり，$E(Q^1(n-1))\cup E(Q^2(n-1))\subseteqq E(Q(n))$ である．

C が補題 1 の (P1)～(P4) のいずれを満たすかにより，四つの場合に分けて考察する．

[場合 1] 補題 1 の (P1) を満たす i が存在するとき：補題 2 のいずれの条件を満たす z が存在するかによっ

て，更に二つの場合に分けて考察する．

［場合 1-1］ 補題 2 の（i）を満たす z が存在するとき：$S^1 = S_{0,z-1}$，$S^2 = S_{z,s}$，$C^1 = C_{0,z-1}$，$C^2 = C_{z,s}$ とする．$c_z = 0$ であるから，C^1 と C^2 の定義より，$C^1, C^2 \in \mathcal{C}_{n-1}$ である．また，S^1 と S^2 はそれぞれ C^1 と C^2 の背骨である．$s^1 = |E(S^1)|$，$s^2 = |E(S^2)|$ とする．

$$s = s^1 + s^2 + 1 \tag{39}$$

であることに注意されたい．更に二つの場合に分けて考察する．

［場合 1-1-1］ s が偶数であるのとき：式 (39) より，s^1 と s^2 の偶奇は異なる．s^1 が偶数であると仮定する（s^1 が奇数のときも同様にして証明できる）．帰納法の仮定より，

$$\mathrm{dist}_{Q^1(n-1)}(\phi^1(v_0), \phi^1(v_{z-1})) = 2 \tag{40}$$

であるような C^1 の $Q^1(n-1)$ への遅延 1 の埋込み $\langle \phi^1, \rho^1 \rangle$ が存在する．また，s^2 は奇数であるから，帰納法の仮定より，

$$\mathrm{dist}_{Q^2(n-1)}(\phi^2(v_z), \phi^2(v_s)) = 1 \tag{41}$$

であるような C^2 の $Q^2(n-1)$ への遅延 1 の埋込み $\langle \phi^2, \rho^2 \rangle$ が存在する．式 (40) より，$Q^1(n-1)$ 上で 2 点 $\phi^1(v_0)$ と $\phi^1(v_{z-1})$ の両方に隣接している点が二つ存在する．そのうちの一方を u とすると，

$$\mathrm{dist}_{Q^1(n-1)}(\phi^1(v_0), u) = 1, \tag{42}$$

$$\mathrm{dist}_{Q^1(n-1)}(u, \phi^1(v_{z-1})) = 1 \tag{43}$$

である．式 (41) と式 (43)，およびハイパキューブの対称性より，一般性を失うことなく次の 2 式が成立すると仮定してよい．

$$\mathrm{dist}_{Q(n)}(u, \phi^2(v_s)) = 1, \tag{44}$$

$$\mathrm{dist}_{Q(n)}(\phi^1(v_{z-1}), \phi^2(v_z)) = 1. \tag{45}$$

$E^- = \{(v_{z-1}, v_z)\}$ とし，C の $Q(n)$ への埋込み $\langle \phi, \rho \rangle$ を次のように定義する：

$$(\star) \begin{cases} \phi(v) = \phi^i(v) \quad \text{if} \quad v \in V(C^i), i = 1, 2; \\ \rho(e) = \begin{cases} \rho^i(e) & \text{if} \quad e \in E(C^i), i = 1, 2, \\ \epsilon(e) & \text{if} \quad e \in E^-. \end{cases} \end{cases}$$

但し，$e = (u, v) \in E^-$ に対し，$\epsilon((u, v)) = (\phi(u), \phi(v))$ とする．C^1 と C^2，および E^- の定義より，

$$E(C) \subseteqq E(C^1) \cup E(C^2) \cup E^- \tag{46}$$

である．帰納法の仮定より，任意の $e \in E(C^1) \cup E(C^2)$ の $\langle \phi, \rho \rangle$ に関する遅延は 1 である．更に，式 (45) より，$e \in E^-$ の $\langle \phi, \rho \rangle$ に関する遅延も 1 である．よって，式 (46) より，$\langle \phi, \rho \rangle$ の遅延は 1 である．式 (42) と式 (44) より，

$$\mathrm{dist}_{Q(n)}(\phi(v_0), \phi(v_s)) = 2. \tag{47}$$

である．従って，$\langle \phi, \rho \rangle$ はこの補題の条件を満たす遅延 1 の埋込みである．

［場合 1-1-2］ s が奇数のとき：式 (39) より，s^1 と s^2 の偶奇は等しい．まず，s^1 と s^2 がともに偶数であると仮定する．帰納法の仮定より，式 (40) を満たす C^1 の $Q^1(n-1)$ への遅延 1 の埋込み $\langle \phi^1, \rho^1 \rangle$ と

$$\mathrm{dist}_{Q^2(n-1)}(\phi^2(v_z), \phi^2(v_s)) = 2 \tag{48}$$

であるような C^2 の $Q^2(n-1)$ への遅延 1 の埋込み $\langle \phi^2, \rho^2 \rangle$ が存在する．式 (40) と式 (48)，およびハイパキューブの対称性より，一般性を失うことなく式 (45) と

$$\mathrm{dist}_{Q(n)}(\phi^1(v_0), \phi^2(v_s)) = 1 \tag{49}$$

が成立すると仮定してよい．$E^- = \{(v_{z-1}, v_z)\}$ とし，C の $Q(n)$ への埋込み $\langle \phi, \rho \rangle$ を（☆）のように定義する．C^1 と C^2 と E^- の定義より，この場合にも，式 (46) を得る．帰納法の仮定より，任意の $e \in E(C^1) \cup E(C^2)$ の $\langle \phi, \rho \rangle$ に関する遅延は 1 である．更に，式 (45) より，$e \in E^-$ の $\langle \phi, \rho \rangle$ に関する遅延も 1 である．よって，式 (46) より，$\langle \phi, \rho \rangle$ の遅延は 1 である．従って，式 (49) より，$\langle \phi, \rho \rangle$ はこの補題の条件を満たす遅延 1 の埋込みである．

s^1 と s^2 がともに奇数の場合も式 (40) と式 (48) をそれぞれ

$$\mathrm{dist}_{Q^1(n-1)}(\phi^1(v_0), \phi^1(v_{z-1})) = 1$$

と式 (41) で置き換えれば，s^1 と s^2 がともに偶数の場合と同様に証明できる．

［場合 1-2］ 補題 2 の（ii）を満たす z が存在するとき：更に二つの場合に分けて考察する．

［場合 1-2-1］ $t(z) - z$ が奇数のとき：$S^1 = S_{z,t(z)}$，$C^1 = C_{z,t(z)}$ とする．$C_{0,z-1}$ と $C_{t(z)+1,s}$ に辺 $(v_{z-1}, v_{t(z)+1})$ を付加して得られるグラフを C^2 とし，$S_{0,z-1}$ と $S_{t(z)+1,s}$ に辺 $(v_{z-1}, v_{t(z)+1})$ を付加

して得られるグラフを S^2 とする．$c_z = 0$ であるから，C^1 と C^2 の定義より，$C^1, C^2 \in \mathcal{C}_{n-1}$ である．また，S^1 と S^2 はそれぞれ C^1 と C^2 の背骨である．$s^1 = |E(S^1)|$，$s^2 = |E(S^2)|$ とする．定義より，この場合も，式 (39) が成り立つ．$s^1 = t(z) - z$ は奇数であるから，式 (39) より，s^2 と s の偶奇は等しい．帰納法の仮定より，

$$\mathrm{dist}_{Q^1(n-1)}(\phi^1(v_z), \phi^1(v_{t(z)})) = 1 \tag{50}$$

であるような C^1 の $Q^1(n-1)$ への遅延 1 の埋込み $\langle\phi^1, \rho^1\rangle$ が存在する．同様に，s^2 が奇数ならば，

$$\mathrm{dist}_{Q^2(n-1)}(\phi^2(v_0), \phi^2(v_s)) = 1 \tag{51}$$

であるような C^2 の $Q^2(n-1)$ への遅延 1 の埋込み $\langle\phi^2, \rho^2\rangle$ が存在し，s^2 が偶数ならば，

$$\mathrm{dist}_{Q^2(n-1)}(\phi^2(v_0), \phi^2(v_s)) = 2 \tag{52}$$

であるような C^2 の $Q^2(n-1)$ への遅延 1 の埋込み $\langle\phi^2, \rho^2\rangle$ が存在する．$(v_{z-1}, v_{t(z)+1}) \in E(C^2)$ であるから，

$$\mathrm{dist}_{Q^2(n-1)}(\phi^2(v_{z-1}), \phi^2(v_{t(z)+1})) = 1 \tag{53}$$

である．式 (50) と式 (53)，およびハイパキューブの対称性より，一般性を失うことなく次の 2 式が成り立つと仮定してよい．

$$\mathrm{dist}_{Q(n)}(\phi^1(v_z), \phi^2(v_{z-1})) = 1, \tag{54}$$

$$\mathrm{dist}_{Q(n)}(\phi^1(v_{t(z)}), \phi^2(v_{t(z)+1})) = 1. \tag{55}$$

$$E^- = \{(v_{z-1}, v_z), (v_{t(z)}, v_{t(z)+1})\}$$

とする．C の $Q(n)$ への埋込み $\langle\phi, \rho\rangle$ を (☆) のように定義する．C^1 と C^2 と E^- の定義より，式 (46) を得る．帰納法の仮定より，任意の $e \in E(C^1) \cup E(C^2)$ の $\langle\phi, \rho\rangle$ に関する遅延は 1 である．また，式 (54) と式 (55) より，任意の $e \in E^-$ の $\langle\phi, \rho\rangle$ に関する遅延は 1 である．よって，式 (46) より，$\langle\phi, \rho\rangle$ の遅延は 1 である．従って，s^2 が奇数ならば式 (51) が成り立ち，s^2 が偶数ならば，式 (52) が成り立つので，$\langle\phi, \rho\rangle$ はこの補題の条件を満たす遅延 1 の埋込みである．

［場合 1-2-2］ $t(z) - z$ が偶数のとき：$S^1 = S_{z,t(z)}$，$C^1 = C_{z,t(z)}$ とする．$C_{0,z-1}$ と $C_{t(z)+1,s}$ に辺 $(v_{z-1}, v_{t(z)+1,1})$ を付加して得られるグラフを C^2 とし，$S_{0,z-1}$ と $S_{t(z)+1,s}$ に点 $v_{t(z),1}$ と 2 辺 $(v_{z-1}, v_{t(z)+1,1})$，$(v_{t(z)+1}, v_{t(z)+1,1})$ を付加して得られるグラフを S^2 とする．$c_z = 0$ であるから，C^1 と C^2 の定義より，$C^1, C^2 \in \mathcal{C}_{n-1}$ である．また，S^1 と S^2 はそれぞれ C^1 と C^2 の背骨である．$s^1 = |E(S^1)|$，$s^2 = |E(S^2)|$ とする．定義より，$s = s^1 + s^2$ であり，$s^1 = t(z) - z$ は偶数であるから，s^2 と s の偶奇は等しい．帰納法の仮定より，

$$\mathrm{dist}_{Q^1(n-1)}(\phi^1(v_z), \phi^1(v_{t(z)})) = 2 \tag{56}$$

であるような C^1 の $Q^1(n-1)$ への遅延 1 の埋込み $\langle\phi^1, \rho^1\rangle$ が存在する．更に，s が奇数ならば，式 (51) を満たし，s が偶数ならば，式 (52) を満たす C^2 の $Q^2(n-1)$ への遅延 1 の埋込み $\langle\phi^2, \rho^2\rangle$ が存在する．$(v_{z-1}, v_{t(z)+1,1}), (v_{t(z)+1,1}, v_{t(z)+1}) \in E(C^2)$ であるから，

$$\mathrm{dist}_{Q^1(n-1)}(\phi^2(v_{z-1}), \phi^2(v_{t(z)+1})) = 2 \tag{57}$$

である．式 (56) と式 (57)，およびハイパキューブの対称性より，一般性を失うことなく式 (54) と式 (55) が成り立つと仮定してよい．

$$E^- = \{(v_{z-1}, v_z), (v_{t(z)}, v_{t(z)+1})\}$$

とし，C の $Q(n)$ への埋込み $\langle\phi, \rho\rangle$ を (☆) のように定義する．C^1 と C^2，および E^- の定義より，式 (46) を得る．帰納法の仮定より，任意の $e \in E(C^1) \cup E(C^2)$ の $\langle\phi, \rho\rangle$ に関する遅延は 1 である．また，式 (54) と式 (55) より，任意の辺 $e \in E^-$ の $\langle\phi, \rho\rangle$ に関する遅延は 1 である．よって，$\langle\phi, \rho\rangle$ の遅延は 1 である．s が奇数なら式 (51) が成り立ち，s が偶数ならば (52) が成り立つので，$\langle\phi, \rho\rangle$ はこの補題の条件を満たす遅延 1 の埋込みである．

［場合 2］ 補題 1 の (P2) の条件を満たす x, y が存在するとき：(P2) より，$y \leq s - 1$ である．更に，$\sum_{j=x}^{t(x)} a_j = 0$，かつ $\sum_{j=x}^{t(x)} g_j = 2^n$ である．従って，$z = x$ とすれば，$t(z) - z = y - x$ は奇数であり，場合 1-2-1 のときと同様にして証明できる（場合 1-2-1 の証明では，$g_{t(z)} \geq 2$ であることを用いていないことに注意されたい）．

［場合 3］ 補題 1 の (P3) の条件を満たす x, y が存在するとき：更に二つの場合に分けて考察する．

［場合 3-1］ $y = s$ のとき：$S_{x,s}$ に点 $v_{s,1}$ と辺 $(v_s, v_{s,1})$ を付加して得られるグラフを S^1 とし，$C^1 = C_{x,s} \setminus \{v_{s,2}\}$ とする．$S_{0,x-1}$ に点 $v_{s,2}$ と辺 $(v_{x-1}, v_{s,2})$ を付加して得られるグラフを S^2 とし，$C_{0,x-1}$ に点 $v_{s,2}$ と辺 $(v_{x-1}, v_{s,2})$ を付加して得られ

るグラフを C^2 とする．C^1 と C^2 の定義と補題 1 の (P3) より，$C^1, C^2 \in \mathcal{C}_{n-1}$ である．S^1 は v_0 と $v_{s,2}$ を両端点とする C^1 の背骨であり，S^2 は v_x と $v_{s,1}$ を両端点とする C^2 の背骨である．

$$E^- = \{(v_{x-1}, v_x), (v_{s,1}, v_{s,2})\}$$

とする．C^1 と C^2，および E^- の定義より，式 (46) を得る．$s^1 = |E(S^1)|$ とし，$s^2 = |E(S^2)|$ とする．

補題 1 の (P3) より，$s^1 = (y-x)+1$ は奇数である．定義より，$s^2 = x$ である．従って，帰納法の仮定より

$$\mathrm{dist}_{Q^1(n-1)}(\phi^1(v_x), \phi^1(v_{s,1})) = 1 \tag{58}$$

となる C^1 の $Q^1(n-1)$ への遅延 1 の埋込み $\langle \phi^1, \rho^1 \rangle$ が存在する．$(v_s, v_{s,1}) \in E(C^1)$ より，

$$\mathrm{dist}_{Q^1(n-1)}(\phi^1(v_s), \phi^1(v_{s,1})) = 1 \tag{59}$$

である．

s^2 が偶数と奇数の場合に分けて考察する．

[場合 3-1-1]　$s^2 = x$ が偶数のとき：帰納法の仮定より，

$$\mathrm{dist}_{Q^2(n-1)}(\phi^2(v_0), \phi^2(v_{s,2})) = 2 \tag{60}$$

となる C^2 の $Q^2(n-1)$ への遅延 1 の埋込み $\langle \phi^2, \rho^2 \rangle$ が存在する．式 (60) より，$Q^2(n-1)$ 上で $\phi^2(v_0)$ と $\phi^2(v_{s,2})$ の両方に隣接している点が二つ存在する．この 2 点のうち一方を u とする．一般性を失うことなく $u \neq \phi^2(v_{x-1})$ と仮定してよい．u の定義より，

$$\mathrm{dist}_{Q^2(n-1)}(u, \phi^2(v_{s,2})) = 1, \tag{61}$$
$$\mathrm{dist}_{Q^2(n-1)}(\phi^2(v_0), u) = 1 \tag{62}$$

である．$(v_{x-1}, v_{s,2}) \in E(C^2)$ であるから，

$$\mathrm{dist}_{Q^2(n-1)}(\phi^2(v_{x-1}), \phi^2(v_{s,2})) = 1 \tag{63}$$

である．式 (58)，(59)，(61)，(63) とハイパキューブの対称性より，一般性を失うことなく

$$\mathrm{dist}_{Q(n)}(\phi^1(v_x), \phi^2(v_{x-1})) = 1, \tag{64}$$
$$\mathrm{dist}_{Q(n)}(\phi^1(v_{s,1}), \phi^2(v_{s,2})) = 1, \tag{65}$$
$$\mathrm{dist}_{Q(n)}(\phi^1(v_s), u) = 1 \tag{66}$$

と仮定してよい．C の $Q(n)$ への埋込み $\langle \phi, \rho \rangle$ を (☆) のように定義する．式 (64) と式 (65) より，任意の $e \in E^-$ の $\langle \phi, \rho \rangle$ に関する遅延は 1 であり，帰納法の仮定より，任意の $e \in E(C^1) \cup E(C^2)$ の $\langle \phi, \rho \rangle$ に関する遅延は 1 である．よって，式 (46) より，$\langle \phi, \rho \rangle$ の遅延は 1 である．$s = (y-x)+x$ は偶数であるから，式 (62) と式 (66) より，

$$\mathrm{dist}_{Q(n)}(\phi(v_0), \phi(v_s)) = 2$$

である．従って，$\langle \phi, \rho \rangle$ はこの補題の条件を満たす遅延 1 の埋込みである．

[場合 3-1-2]　$s^2 = x$ が奇数のとき：帰納法の仮定より，

$$\mathrm{dist}_{Q^2(n-1)}(\phi^2(v_0), \phi^2(v_{s,2})) = 1 \tag{67}$$

となる C^2 の $Q^2(n-1)$ への遅延 1 の埋込み $\langle \phi^2, \rho^2 \rangle$ が存在する．$(v_{x-1}, v_{s,2}) \in E(C^2)$ であるから，式 (63) を得る．式 (58)，(59)，(63)，(67) とハイパキューブの対称性より，一般性を失うことなく式 (64) と (65)，および

$$\mathrm{dist}_{Q(n)}(\phi^1(v_s), \phi^2(v_0)) = 1 \tag{68}$$

が成り立つと仮定してよい．C の $Q(n)$ への埋込み $\langle \phi, \rho \rangle$ を (☆) のように定義する．式 (64) と式 (65) より，任意の $e \in E^-$ の $\langle \phi, \rho \rangle$ に関する遅延は 1 であり，帰納法の仮定より，任意の $e \in E(C^1) \cup E(C^2)$ の $\langle \phi, \rho \rangle$ に関する遅延は 1 である．よって，式 (46) より，$\langle \phi, \rho \rangle$ の遅延は 1 である．従って，$s = (y-x)+x$ は奇数であるから，式 (68) より，$\langle \phi, \rho \rangle$ はこの補題の条件を満たす遅延 1 の埋込みである．

[場合 3-2]　$1 \leqq y \leqq s-1$ のとき：$S_{x,y}$ に点 $v_{y,1}$ と辺 $(v_y, v_{y,1})$ を付加して得られるグラフを S^1 とし，$C^1 = C_{x,y} \setminus \{v_{y,2}\}$ とする．$S_{0,x-1}$ と $S_{y+1,s}$ に点 $v_{y,2}$ と 2 辺 $(v_{x-1}, v_{y,2})$ と $(v_{y,2}, v_{y+1})$ を付加して得られるグラフを S^2 とし，$C_{0,x-1}$ と $C_{y+1,s}$ に点 $v_{y,2}$ と 2 辺 $(v_{x-1}, v_{y,2})$ と $(v_{y,2}, v_{y+1})$ を付加して得られるグラフを C^2 とする．C^1 と C^2 の定義と補題 1 の (P3) より，$C^1, C^2 \in \mathcal{C}_{n-1}$ である．S^1 は v_x と $v_{y,2}$ を両端点とする C^1 の背骨であり，S^2 は v_0 と v_s を両端点とする C^2 の背骨である．

$$E^- = \{(v_{x-1}, v_x), (v_y, v_{y+1}), (v_{y,1}, v_{y,2})\}$$

とする．C^1 と C^2，および E^- の定義より，式 (46) を得る．$s^1 = |E(S^1)|$，$s^2 = |E(S^2)|$ とする．補題 1 の (P3) より，$s^1 = (y-x)+1$ は奇数である．従って，帰納法の仮定より，

$$\mathrm{dist}_{Q^1(n-1)}(\phi^1(v_x), \phi^1(v_{y,1})) = 1 \quad (69)$$

となる C^1 の $Q^1(n-1)$ への遅延 1 の埋込み $\langle \phi^1, \rho^1 \rangle$ が存在する．$(v_y, v_{y,1}) \in E(C^1)$ であるから，

$$\mathrm{dist}_{Q^1(n-1)}(\phi^1(v_y), \phi^1(v_{y,1})) = 1 \quad (70)$$

である．$y-x$ は偶数であり，$s^2 = s-(y-x)$ であるから，s と s^2 の偶奇は等しい．

s^2 が偶数と奇数の場合に分けて考察する．

[場合 3-2-1]　s^2 が偶数のとき：帰納法の仮定より，式 (52) を満たす C^2 の $Q^2(n-1)$ への遅延 1 の埋込み $\langle \phi^2, \rho^2 \rangle$ が存在する．C^2 の定義より，$(v_{x-1}, v_{y,2}), (v_{y,2}, v_{y+1}) \in E(C^2)$ であるから，次の 2 式を得る．

$$\mathrm{dist}_{Q^2(n-1)}(\phi^2(v_{x-1}), \phi^2(v_{y,2})) = 1, \quad (71)$$
$$\mathrm{dist}_{Q^2(n-1)}(\phi^2(v_{y+1}), \phi^2(v_{y,2})) = 1. \quad (72)$$

式 (69)〜(72) とハイパキューブの対称性より，式 (64) と

$$\mathrm{dist}_{Q(n)}(\phi^1(v_{y,1}), \phi^2(v_{y,2})) = 1, \quad (73)$$
$$\mathrm{dist}_{Q(n)}(\phi^1(v_y), \phi^2(v_{y+1})) = 1 \quad (74)$$

が成り立つと仮定してよい．C の $Q(n)$ への埋込み $\langle \phi, \rho \rangle$ を (☆) のように定義する．式 (64), (73), および (74) より，任意の $e \in E^-$ の $\langle \phi, \rho \rangle$ に関する遅延は 1 であり，帰納法の仮定より，任意の $e \in E(C^1) \cup E(C^2)$ の $\langle \phi, \rho \rangle$ に関する遅延は 1 である．よって，式 (46) より，$\langle \phi, \rho \rangle$ の遅延は 1 である．更に，s と s^2 の偶奇は等しく，s は偶数である．従って，式 (52) より，$\langle \phi, \rho \rangle$ はこの補題の条件を満たす遅延 1 の埋込みである．

[場合 3-2-2]　s^2 が奇数のとき：式 (52) を式 (51) に置き換えれば，場合 3-2-1 のときと同様に証明できる．

[場合 4]　補題 1 の (P4) を満たす x, y が存在するとき：更に二つの場合に分けて考察する．

[場合 4-1]　$y = s$ のとき：$S_{x,s}$ に点 $v_{x-1,2}$ と辺 $(v_x, v_{x-1,2})$ を付加して得られるグラフを S^1 とし，$C_{x,s}$ に点 $v_{x-1,2}$ と辺 $(v_x, v_{x-1,2})$ を付加して得られるグラフを C^1 とする．$S_{0,x-1}$ に点 $v_{x-1,1}$ と辺 $(v_{x-1}, v_{x-1,1})$ を付加して得られるグラヲを S^2 とし，$C^2 = C_{0,x-1} \setminus \{v_{x-1,2}\}$ とする．C^1 と C^2 の定義と補題 1 の (P4) より，$C^1, C^2 \in \mathcal{C}_{n-1}$ である．S^1 は $v_{x-1,2}$ と v_s を両端点とする C^1 の背骨であり，S^2 は v_0 と $v_{x-1,1}$ を両端点とする C^2 の背骨である．

$$E^- = \{(v_{x-1}, v_x), (v_{x-1,1}, v_{x-1,2})\}$$

とする．C^1 と C^2，および E^- の定義より，式 (46) を得る．$s^1 = |E(S^1)|$，$s^2 = |E(S^2)|$ とする．定義より，$s^1 = s-x+1$，$s^2 = x$ であるから，補題 1 の (P4) と $y = s$ より，s^1 は奇数である．従って，帰納法の仮定より，

$$\mathrm{dist}_{Q^1(n-1)}(\phi^1(v_{x-1,2}), \phi^1(v_s)) = 1 \quad (75)$$

となる C^1 の $Q^1(n-1)$ への遅延 1 の埋込み $\langle \phi^1, \rho^1 \rangle$ が存在する．$(v_{x-1,2}, v_x) \in E(C^1)$ であるから，

$$\mathrm{dist}_{Q^1(n-1)}(\phi^1(v_{x-1,2}), \phi^1(v_x)) = 1 \quad (76)$$

である．

s^2 が偶数と奇数の場合に分けて考察する．

[場合 4-1-1]　$s^2 = x$ が偶数のとき：帰納法の仮定より，

$$\mathrm{dist}_{Q^2(n-1)}(\phi^2(v_0), \phi^2(v_{x-1,1})) = 2 \quad (77)$$

となる C^2 の $Q^2(n-1)$ への遅延 1 の埋込み $\langle \phi^2, \rho^2 \rangle$ が存在する．式 (77) より，$Q^2(n-1)$ 上の $\phi^2(v_0)$ と $\phi^2(v_{x-1,1})$ の両方に隣接している点が二つ存在する．この 2 点のうちの一方を u とする．一般性を失うことなく $u \neq \phi^2(v_{x-1})$ と仮定してよい．u の定義より，式 (62) と

$$\mathrm{dist}_{Q^2(n-1)}(u, \phi^2(v_{x-1,1})) = 1 \quad (78)$$

を得る．$(v_{x-1}, v_{x-1,1}) \in E(C^2)$ であるから，

$$\mathrm{dist}_{Q^2(n-1)}(\phi^2(v_{x-1}), \phi^2(v_{x-1,1})) = 1 \quad (79)$$

である．式 (75), (76), (78), (79) とハイパキューブの対称性より，一般性を失うことなく式 (64), 式 (66), および

$$\mathrm{dist}_{Q(n)}(\phi^1(v_{x-1,2}), \phi^2(v_{x-1,1})) = 1 \quad (80)$$

が成立すると仮定してよい．C の $Q(n)$ への埋込み $\langle \phi, \rho \rangle$ を (☆) のように定義する．式 (64) と式 (80) より，任意の $e \in E^-$ の $\langle \phi, \rho \rangle$ に関する遅延は 1 であり，帰納法の仮定より，任意の $e \in E(C^1) \cup E(C^2)$ の $\langle \phi, \rho \rangle$ に関する遅延は 1 である．よって，式 (46) より，$\langle \phi, \rho \rangle$ の遅延は 1 である．従って，$s = (y-x)+x$ は偶数であり，式 (62) と式 (66) より，

$$\mathrm{dist}_{Q(n)}(\phi(v_0), \phi(v_s)) = 2$$

であるから，$\langle\phi,\rho\rangle$ はこの補題の条件を満たす遅延1の埋込みである．

[場合 4-1-2]　$s^2=x$ が奇数のとき：帰納法の仮定より，

$$\mathrm{dist}_{Q^2(n-1)}(\phi^2(v_0),\phi^2(v_{x-1,1}))=1 \tag{81}$$

となる C^2 の $Q^2(n-1)$ への遅延1の埋込み $\langle\phi^2,\rho^2\rangle$ が存在する．$(v_{x-1},v_{x-1,1})\in E(C^2)$ であるから，式(79)を得る．式(75)，(76)，(79)，(81)とハイパキューブの対称性より，一般性を失うことなく式(64)と(68)，および(80)が成り立つと仮定してよい．C の $Q(n)$ への埋込み $\langle\phi,\rho\rangle$ を (☆) のように定義する．式(64)と式(80)より，任意の $e\in E^-$ の $\langle\phi,\rho\rangle$ に関する遅延は1である．更に，帰納法の仮定より，任意の $e\in E(C^1)\cup E(C^2)$ の $\langle\phi,\rho\rangle$ に関する遅延は1である．よって，式(46)より，$\langle\phi,\rho\rangle$ の遅延は1である．従って，$s=(y-x)+x$ は奇数であるから，式(68)より，$\langle\phi,\rho\rangle$ はこの補題の条件を満たす遅延1の埋込みである．

[場合 4-2]　$1\leqq y\leqq s-1$ のとき：$S_{x,y}$ に点 $v_{x-1,2}$ と辺 $(v_x,v_{x-1,2})$ を付加して得られるグラフを S^1 とし，$C_{x,y}$ に点 $v_{x-1,2}$ と辺 $(v_x,v_{x-1,2})$ を付加して得られるグラフを C^1 とする．$S_{0,x-1}$ と $S_{y+1,s}$ に点 $v_{x-1,1}$ と2辺 $(v_{x-1},v_{x-1,1})$ と $(v_{x-1,1},v_{y+1})$ を付加して得られるグラフを S^2 とし，$C_{0,x-1}\setminus\{v_{x-1,2}\}$ と $C_{y+1,s}$ に辺 $(v_{x-1,1},v_{y+1})$ を付加して得られるグラフを C^2 とする．C^1 と C^2 の定義より，$C^1,C^2\in\mathcal{C}_{n-1}$ である．S^1 は $v_{x-1,2}$ と v_y を両端点とする C^1 の背骨であり，S^2 は v_0 と v_s を両端点とする C^2 の背骨である．

$$E^-=\{(v_{x-1},v_x),(v_{x-1,1},v_{x-1,2}),(v_y,v_{y+1})\}$$

とする．C^1 と C^2，および E^- の定義より，式(46)を得る．$s^1=|E(S^1)|$，$s^2=|E(S^2)|$ とする．補題1の(P4)より，$s^1=(y-x)+1$ は奇数である．従って，帰納法の仮定より，

$$\mathrm{dist}_{Q^1(n-1)}(\phi^1(v_{x-1,2}),\phi^1(v_y))=1 \tag{82}$$

となる C^1 の $Q^1(n-1)$ への遅延1の埋込み $\langle\phi^1,\rho^1\rangle$ が存在する．C^1 の定義より，$(v_{x-1,2},v_x)\in E(C^1)$ であるから，式(76)を得る．s^2 の定義より，$s^2=s-(y-x)$ であるから，s と s^2 の偶奇は等しい．

s^2 が偶数と奇数の場合に分けて考察する．

[場合 4-2-1]　s^2 が偶数のとき：帰納法の仮定より，式(52)を満たす C^2 の $Q^2(n-1)$ への遅延1の埋込み $\langle\phi^2,\rho^2\rangle$ が存在する．C^2 の定義より，$(v_{x-1},v_{x-1,1}),(v_{x-1,1},v_{y+1})\in E(C^2)$ であるから，式(79)と

$$\mathrm{dist}_{Q^2(n-1)}(\phi^2(v_{x-1,1}),\phi^2(v_{y+1}))=1 \tag{83}$$

を得る．式(76)，(79)，(82)，(83)とハイパキューブの対称性より，一般性を失うことなく式(64)，(74)，および式(80)が成り立つと仮定してよい．C の $Q(n)$ への埋込み $\langle\phi,\rho\rangle$ を (☆) のように定義する．式(64)，(74)，および式(80)より，任意の $e\in E^-$ の $\langle\phi,\rho\rangle$ に関する遅延は1であり，帰納法の仮定より，任意の $e\in E(C^1)\cup E(C^2)$ の $\langle\phi,\rho\rangle$ に関する遅延は1である．よって，式(46)より，$\langle\phi,\rho\rangle$ の遅延は1である．s と s^2 の偶奇は等しいので，s は偶数である．従って，式(52)より，$\langle\phi,\rho\rangle$ はこの補題の条件を満たす遅延1の埋込みである．

[場合 4-2-2]　s^2 が奇数のとき：式(52)を式(51)に置き換えれば，場合4-2-1のときと同様に証明できる．

以上で補題3は証明された．□

5. 定理2の証明

真のパス幅が2以下である任意の2分木 T の次数1の点に接続している辺を細分して得られるグラフは T を部分グラフとして含み，真のパス幅は2以下である．従って，定理2を示すためには，2^n 点からなり，真のパス幅が2以下である任意の2分木のみについて示せば十分である．

2^n 点からなり，真のパス幅が2以下である2分木 T の $Q(n)$ への埋込みを次のように構成して，定理2を証明する：まず，T を部分グラフとして含む梯子と呼ばれる 2^n 点からなるグラフ L を構成し；次に，L を $Q(n)$ に遅延2で埋め込む．

$n\geqq 2$ に対し，$\{(i,j)|\ 0\leqq i\leqq 1, 1\leqq j\leqq n-1\}\cup\{(0,0),(0,n)\}$ を点集合とし，$\{((0,j),(1,j))|\ 1\leqq j\leqq n-1\}\cup\{((0,j),(0,j+1))|\ 0\leqq j\leqq n-1\}\cup\{((1,j),(1,j+1))|\ 1\leqq j\leqq n-2\}\cup\{((0,0),(1,1)),((0,n),(1,n-1))\}$ を辺集合とするグラフを2段格子と言う．辺 $((0,j),(1,j))$ $(1\leqq j\leqq n-1)$ を弦と言う．2段格子から弦ではないいくつかの辺を任意に細分して得られるグラフを梯子と言う．もとの2段格子の弦に対応する梯子の辺も弦と言う．梯子 L の弦の集合を $K(L)$ で表す．定義から，$L-K(L)$ は閉路である．この閉路を外閉路と言い，

$R(L)$ で表す．

［補題 4］ T を真のパス幅が 2 以下の任意の 2 分木とする．このとき，T を全域部分グラフとして含む梯子が存在する．

（証明） T を任意の真のパス幅 2 以下の 2 分木とし，T の背骨を $S=(v_0,v_1,\cdots,v_s)$ とする．T にいくつかの辺を付加することにより，所望の梯子を構成する．

$B(T,S)=\{(u,v)|\ u\in V(S), v\notin V(S), (u,v)\in E(T)\}$ とする．$T\setminus V(S)$ の連結成分はパスである．$T\setminus V(S)$ の連結成分のうち，T 上で v_i に隣接する点を含むパスを $P(T,S,v_i)$ とする．そのようなパスが存在しないならば，$P(T,S,v_i)=\emptyset$ と表現する．$P(T,S,v_i)\neq\emptyset$ ならば，$P(T,S,v_i)$ の一方の端点を v_i^l，他方の端点を v_i^r とする．但し，$|V(P(T,S,v_i))|=1$ ならば，$v_i^l=v_i^r$ とする．$V(P(T,S,v_i))$ のうち v_i に隣接する点を $a(v_i)$ で表す．$J(T,S)=\{i|P(T,S,v_i)\neq\emptyset\}$，$\beta=|J(T,S)|-1$ とし，$J(T,S)$ の要素を小さいものから順に $h(0),h(1),\cdots,h(\beta)$ とする．

$$E_b^*=\{(v_i^r,v_{i+1}^l)|i\in J(T,S), 0\leq i\leq\beta-1\},$$
$$E_e^*=\{(v_{h(0)}^l,v_0),(v_{h(\beta)}^r,v_s)\}$$

とし，T に $E_b^*\cup E_e^*$ に含まれる辺を付加して得られるグラフを L とする．このとき，L が梯子であることは簡単に確かめられる．□

背骨は多項式時間で求められるので [9]，T を含む梯子は多項式時間で構成できることに注意されたい．

梯子 L から一つの弦 e とその両端点を取り除いて得られるグラフの二つの連結成分の点数が等しいならば，e を L の 2 等分弦と言う．

［補題 5］ $n\geqq 2$ に対し，L を 2^n 点からなる任意の梯子とするとき，$e\in E(R(L))$ の遅延が 1 であるような L の $Q(n)$ への遅延 2 以下の埋込みが存在する．

（証明） n に関する数学的帰納法で証明する．

$n=2$ のとき，L は長さ 4 の閉路か一つの弦をもつ長さ 4 の閉路であるので，この補題が成立することは簡単に確かめられる．

$n\geqq 3$ とし，$n-1$ に関してはこの補題が成立すると仮定する．L を 2^n 点からなる梯子とする．

［場合 1］ L が 2 等分弦を含まないとき：$E(R(L))$ に含まれる適当な 2 辺を取り除けば，L を $|V(L)|/2$ 点からなる二つの連結成分からなるグラフに分解できる．その 2 辺の組を (u^1,u^2)，(v^1,v^2) とする．但し，$i=1,2$ に対して，u^i と v^i は同じ連結成分上にあるものとする．この二つの連結成分のうち点 u^1 を含む方に辺 (u^1,v^1) を付加して得られるグラフを L^1 とし，もう一方に辺 (u^2,v^2) を付加して得られるグラフを L^2 とすると，$i=1,2$ に対し，L^i は $(L^i-E(L^i)\cap K(L))\cup\{(u^i,v^i)\}$ を外閉路とする梯子であり，$K(L)=K(L^1)\cup K(L^2)$ である．

$E^+=\{(u^1,u^2),(v^1,v^2)\}$，$K^+=\{(u^1,v^2)\}$ とすると，定義より，次の 2 式を得る．

$$E(R(L))\subseteqq E(R(L^1))\cup E(R(L^2))\cup E^+, \qquad (84)$$
$$K(L)\subseteqq K(L^1)\cup K(L^2)\cup K^+. \qquad (85)$$

$Q(n)$ から一つの次元の辺をすべて取り除いて得られる二つの $n-1$ 次元キューブをそれぞれ $Q^1(n-1)$，$Q^2(n-1)$ とする．$(V(Q^1(n-1)),\ V(Q^2(n-1)))$ は $V(Q(n))$ の分割である．帰納法の仮定より，$i=1,2$ に対し，任意の $e\in E(R(L^i))$ の遅延が 1 である L^i の $Q^i(n-1)$ への遅延 2 以下の埋込み $\langle\phi^i,\rho^i\rangle$ が存在する．ハイパキューブの対称性より，一般性を失うことなく

$$\mathrm{dist}_{Q(n)}(\phi^1(u^1),\phi^2(u^2))=1, \qquad (86)$$
$$\mathrm{dist}_{Q(n)}(\phi^1(v^1),\phi^2(v^2))=1 \qquad (87)$$

と仮定してよい．

L の $Q(n)$ への埋込み $\langle\phi,\rho\rangle$ を次のように定義する；

$$\phi(v)=\phi^i(v)\quad \text{if}\quad v\in V(L^i)\ (i=1,2);$$
$$\rho(e)=\begin{cases}\rho^i(e) & \text{if}\quad e\in E(L^i)\ (i=1,2),\\ P_{\min}(e) & \text{if}\quad e\in E^+\cup K^+\end{cases}$$

但し，$e=(u,v)\in E^+$ に対し，$P_{\min}((u,v))$ は $\phi(u)$ と $\phi(v)$ を結ぶ $Q(n)$ 上の任意の最短パスを表す．ρ の定義と帰納法の仮定より，辺 $e\in E(R(L^1))\cup E(R(L^2))$ の $\langle\phi,\rho\rangle$ に関する遅延は 1 であり，辺 $e\in K(L^1)\cup K(L^2)$ の $\langle\phi,\rho\rangle$ に関する遅延は 2 以下である．更に，式 (86) と式 (87) より，$|\rho((u^1,u^2))|=1$，$|\rho((v^1,v^2))|=1$ であり，$|\rho((u^1,v^2))|\leqq|\rho((u^1,u^2))|+|\rho((v^1,v^2))|=2$ である．よって，式 (84) と式 (85) より，任意の辺 $e\in E(R(L))$ の $\langle\phi,\rho\rangle$ に関する遅延は 1 であり，$\langle\phi,\rho\rangle$ の遅延は 2 以下である．

［場合 2］ L が 2 等分弦 (u^1,v^2) を含むとき：次のような 2 点 v^1,u^2 が存在する：L から 3 辺 (u^1,u^2)，(v^1,v^2)，(u^1,v^2) を取り除くと $|V(L)|/2$ 点からなる

二つの連結成分に分割される．このとき，(u^1, v^2) は 2 等分弦であり，$(u^1, u^2), (v^1, v^2) \in E(R(L))$ である．L が 2 等分弦を含まないときと同様に L^1 と L^2 を定義すると，$i = 1, 2$ に対し，L^i は $(L^i - E(L^i) \cap K(L))$ を外閉路とする梯子であり，$K(L) = K(L^1) \cup K(L^2) \cup \{(u^1, v^2)\}$ である．

この場合も，場合 1 と同様にして証明できる．

以上で，補題 5 が証明された．□

謝辞 日ごろ御指導頂く梶谷洋司教授に感謝する．本研究は東京工業大学の CAD21 研究体の研究の一環として行われた．

文献

[1] T. Dvořák, I. Havel, J.-M. Laborde, and P. Liebl, "Generalized hypercubes and graph embedding with dilation," Rost. Math Kolloq, vol.39, pp.13–20, 1990.

[2] I. Havel, "On certain trees in hypercubes," in Topics in Combinatorics and Graph Theory, ed. R.H. Rainer Bodendiek, pp.353–358, Physica-Verlag, Heidelberg, 1990.

[3] I. Havel, J.M. Laborde, and P. Liebl, "Caterpillars-like trees spanning hypercubes," Čas. Pěst. Mat.

[4] I. Havel and P. Liebl, "One-legged caterpillas span hypercubes," J. Graph Theory, vol.10, no.1, pp.69–78, spring 1986.

[5] V. Heun and E.W. Mayr, "A new algorithm for embedding an arbitrary binary tree into its optimal hypercube," J. Algorithm, vol.20, pp.375–399, 1996.

[6] L. Nebeský, "On cubes and dichotomic trees," Čas. Pěst. Mat., vol.99, pp.164–167, 1974.

[7] L. Nebeský, "Embedding l-quasistars into n-cubes," Czech. Math. Journal, vol.38, pp.705–712, 1988.

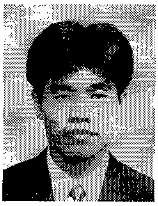
[8] A. Takahashi, S. Ueno, and Y. Kajitani, "Mixed searching and proper-pathwidth," Theoretical Computer Science, vol.137, pp.253–268, 1995.

[9] S. Tayu and S. Ueno, "Efficient embeddings of binary trees with bounded proper pathwidth into paths and grids," IEICE Trans. Fundamentals, vol.E78-A, pp.131–136, 1997.

[10] A. Wagner, "Embedding trees in the hypecubes," Tech. Rep., Tront Univ., 1987.

[11] A. Wagner, "Embedding all binary trees in the hypercube," J. Parallel Distrib. Comput., vol.18, pp.33–43, 1993.

（平成 9 年 4 月 25 日受付，10 月 27 日再受付）



田湯　智

1992 東工大・工・電気卒．1997 同大大学院博士課程了．工博．同年北陸先端科学技術大学院大学・情報科学研究科助手．グラフ理論の並列・VLSI 計算論への応用に関する研究に従事．

上野　修一

1976 年山梨大・工・電子卒．1982 東工大大学院博士課程了．工博．同年東工大工学部助手．1987 同助教授．1997 同教授．グラフ理論の並列・VLSI 計算論への応用に関する研究に従事．1985 年度本会論文賞，情報処理学会 30 周年記念論文賞受賞．